Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
3. Klausur

Dienstag, 8. November 2022 (Nachmittag)

1 Stunde

Hinweise für die Kandidaten

- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[55 Punkte]**.

8822 – 7128

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite. Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, müssen von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

1. [Maximale Punktzahl: 28]

In dieser Frage sollen Sie Reihen folgender Form untersuchen:

$$\sum_{i=1}^{n} i^q = 1^q + 2^q + 3^q + \ldots + n^q \textbf{ mit } n, q \in \mathbb{Z}^+$$

Mit Hilfe verschiedener Methoden sollen Sie für diese Reihen Polynome in n finden.

Für $q = 1$ ist die obige Reihe arithmetisch.

(a) Zeigen Sie, dass gilt: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$. [1]

Betrachten Sie nun den Fall $q = 2$.

(b) Die folgende Tabelle enthält Werte für n^2 und $\sum_{i=1}^{n} i^2$ für $n = 1, 2, 3$.

n	n^2	$\sum_{i=1}^{n} i^2$
1	1	1
2	4	5
3	9	p

(i) Notieren Sie den Wert von p. [1]

(ii) Die Summe der ersten n Quadratzahlen kann als kubisches Polynom mit drei Termen ausgedrückt werden:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 \text{ mit } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}^+.$$

Notieren Sie damit ein System von drei linearen Gleichungen in a_1, a_2 und a_3. [3]

(iii) Finden Sie damit die Werte von a_1, a_2 und a_3. [2]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 1)

Sie werden nun eine Methode untersuchen, die auf alle Werte von q verallgemeinert werden kann.

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

(c) Zeigen Sie, dass $x f'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$. [1]

Es sei $f_1(x) = x f'(x)$. Betrachten Sie damit die folgende Familie von Funktionen:

$$f_2(x) = x f_1'(x)$$

$$f_3(x) = x f_2'(x)$$

$$f_4(x) = x f_3'(x)$$

$$\ldots$$

$$f_q(x) = x f_{q-1}'(x)$$

(d) (i) Zeigen Sie, dass $f_2(x) = \sum_{i=1}^{n} i^2 x^i$. [2]

(ii) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $f_q(x) = \sum_{i=1}^{n} i^q x^i$, $q \in \mathbb{Z}^+$. [6]

(iii) Notieren Sie mit Hilfe der Sigma-Schreibweise einen Ausdruck für $f_q(1)$. [1]

(e) Betrachten Sie $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ für $x \neq 1$ als geometrische Reihe.
Zeigen Sie $f(x) = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$. [2]

(f) Zeigen Sie für $x \neq 1$ dass $f_1(x) = \dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$. [3]

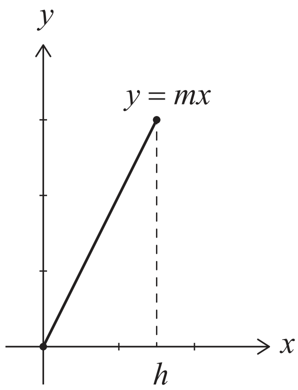
(g) (i) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x \to 1} f_1(x)$ unbestimmt ist. [1]

(ii) Zeigen Sie daher mit Hilfe der Regel von de L'Hospital, dass $\lim\limits_{x \to 1} f_1(x) = \dfrac{1}{2} n(n+1)$. [5]

2. [Maximale Punktzahl: 27]

In dieser Frage untersuchen Sie gekrümmte Oberflächen und leiten mit Hilfe der Analysis wichtige Formeln der Geometrie ab.

Betrachten Sie die Ursprungsgerade $y = mx$ für $0 \le x \le h$. m und h sind positive Konstanten.



Durch Drehung dieser Geraden um $360°$ um die x-Achse entsteht ein Kegel mit einer gekrümmten Oberfläche A, für die gilt:

$$A = 2\pi \int_0^h y\sqrt{1+m^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

(a) Es gelte: $m = 2$ und $h = 3$. Zeigen Sie für diesen Fall: $A = 18\sqrt{5}\,\pi$. [2]

(b) Betrachten wir nun den allgemeinen Fall, bei dem durch Drehung der Geraden $y = mx$ um $360°$ um die x-Achse und für $0 \le x \le h$ ein Kegel entsteht.

(i) Deduzieren Sie einen Ausdruck für den Radius r dieses Kegels in Abhängigkeit von h und m. [1]

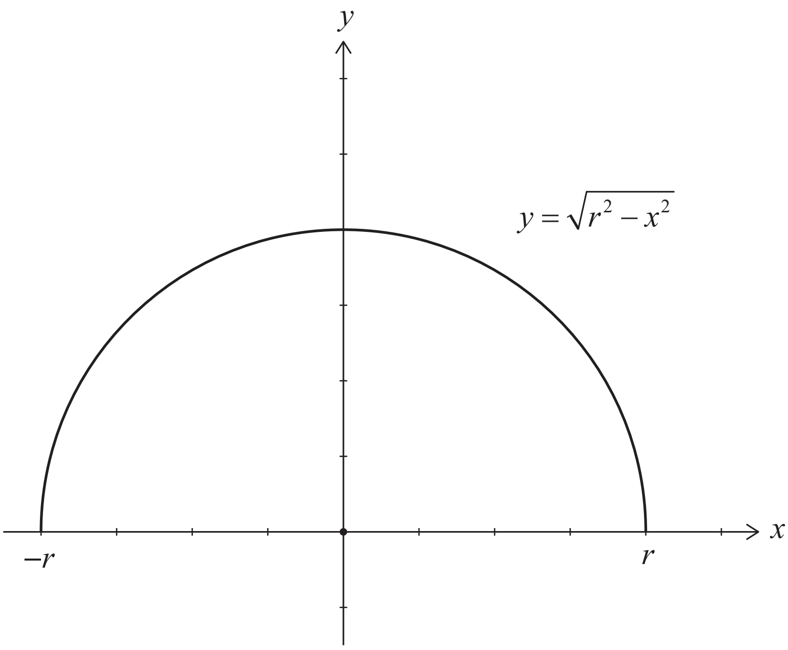
(ii) Deduzieren Sie einen Ausdruck für die schräge Höhe l in Abhängigkeit von h und m. [2]

(iii) Zeigen Sie dann mit Hilfe des obigen Integrals, dass $A = \pi rl$. [3]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 2)

Betrachten Sie den Halbkreis mit dem Radius r, definiert durch $y=\sqrt{r^2-x^2}$ mit $-r \le x \le r$.



(c) Finden Sie einen Ausdruck für $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. [2]

Eine differenzierbare Kurve $y=f(x)$ ist definiert für $x_1 \le x \le x_2$ und $y \ge 0$. Wenn eine solche Kurve um $360°$ um die x-Achse gedreht wird, hat die entstehende Oberfläche den folgenden Flächeninhalt A:

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

(d) Durch Drehung des Halbkreises $y=\sqrt{r^2-x^2}$ mit $-r \le x \le r$ um $360°$ um die x-Achse entsteht eine Kugel. Zeigen Sie durch Integration, dass der Flächeninhalt der Oberfläche dieser Kugel $4\pi r^2$ beträgt. [4]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 2)

(e) Es sei $f\left(x\right)=\sqrt{r^2-x^2}$ mit $-r \le x \le r$.

Der Graph von $y=f(x)$ wird in den Graphen von $y=f(kx)$, $k>0$ überführt. Dadurch entsteht eine andere Kurve, die sogenannte Halbellipse.

(i) Beschreiben Sie diese geometrische Abbildung. [2]

(ii) Notieren Sie die x-Achsenabschnitte des Graphen $y=f(kx)$ in Abhängigkeit von r und k. [1]

(iii) Es sei weiterhin $y=f(kx)$. Finden Sie einen Ausdruck für $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ in Abhängigkeit von x, r und k. [2]

(iv) Die Halbellipse $y=f(kx)$ wird um $360°$ um die x-Achse gedreht, wodurch ein Körper namens Rotationsellipsoid entsteht.

Finden Sie, abhängig von r und k, einen Ausdruck für den Flächeninhalt der Oberfläche A dieses Rotationsellipsoids.

Geben Sie Ihre Antwort in der Form $2\pi\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{p\left(x\right)}\,\mathrm{d}x$ an, wobei $p(x)$ ein Polynom ist. [4]

(v) Der Planet Erde kann als Rotationsellipsoid modelliert werden. In diesem Modell gilt:

- Das Ellipsoid hat eine Rotationssymmetrieachse, die vom Nordpol zum Südpol verläuft.
- Die Entfernung vom Nordpol zum Südpol beträgt $12\,714\,\mathrm{km}$.
- Der Durchmesser des Äquators beträgt $12\,756\,\mathrm{km}$.

Finden Sie durch Wahl geeigneter Werte für r und k die Oberfläche der Erde in km^2 auf 4 signifikante Stellen genau. Formulieren Sie Ihre Antwort in der Form $a \times 10^q$ mit $1 \le a < 10$ und $q \in \mathbb{Z}^+$. [4]

Quellen: