

© International Baccalaureate Organization 2022

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2022

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2022

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Mathematik: Analyse und Ansätze

Leistungsstufe

3. Klausur

Dienstag, 8. November 2022 (Nachmittag)

1 Stunde

Hinweise für die Kandidaten

- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[55 Punkte]**.

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Answerheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite. Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, müssen von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

1. [Maximale Punktzahl: 28]

In dieser Frage sollen Sie Reihen folgender Form untersuchen:

$$\sum_{i=1}^n i^q = 1^q + 2^q + 3^q + \dots + n^q \text{ mit } n, q \in \mathbb{Z}^+$$

Mit Hilfe verschiedener Methoden sollen Sie für diese Reihen Polynome in n finden.

Für $q = 1$ ist die obige Reihe arithmetisch.

(a) Zeigen Sie, dass gilt: $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n(n+1)$. [1]

Betrachten Sie nun den Fall $q = 2$.

(b) Die folgende Tabelle enthält Werte für n^2 und $\sum_{i=1}^n i^2$ für $n = 1, 2, 3$.

n	n^2	$\sum_{i=1}^n i^2$
1	1	1
2	4	5
3	9	p

(i) Notieren Sie den Wert von p . [1]

(ii) Die Summe der ersten n Quadratzahlen kann als kubisches Polynom mit drei Termen ausgedrückt werden:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = a_1n + a_2n^2 + a_3n^3 \text{ mit } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}^+.$$

Notieren Sie damit ein System von drei linearen Gleichungen in a_1, a_2 und a_3 . [3]

(iii) Finden Sie damit die Werte von a_1, a_2 und a_3 . [2]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 1)

Sie werden nun eine Methode untersuchen, die auf alle Werte von q verallgemeinert werden kann.

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

(c) Zeigen Sie, dass $xf'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n$. [1]

Es sei $f_1(x) = xf'(x)$. Betrachten Sie damit die folgende Familie von Funktionen:

$$f_2(x) = xf_1'(x)$$

$$f_3(x) = xf_2'(x)$$

$$f_4(x) = xf_3'(x)$$

...

$$f_q(x) = xf_{q-1}'(x)$$

(d) (i) Zeigen Sie, dass $f_2(x) = \sum_{i=1}^n i^2 x^i$. [2]

(ii) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $f_q(x) = \sum_{i=1}^n i^q x^i$, $q \in \mathbb{Z}^+$. [6]

(iii) Notieren Sie mit Hilfe der Sigma-Schreibweise einen Ausdruck für $f_q(1)$. [1]

(e) Betrachten Sie $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$ für $x \neq 1$ als geometrische Reihe.

Zeigen Sie $f(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$. [2]

(f) Zeigen Sie für $x \neq 1$ dass $f_1(x) = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$. [3]

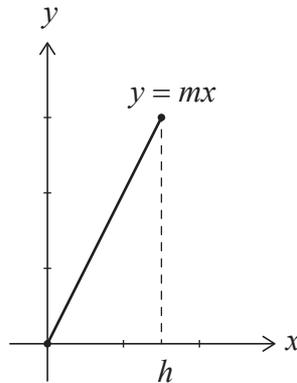
(g) (i) Zeigen Sie, dass $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x)$ unbestimmt ist. [1]

(ii) Zeigen Sie daher mit Hilfe der Regel von de L'Hospital, dass $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = \frac{1}{2}n(n+1)$. [5]

2. [Maximale Punktzahl: 27]

In dieser Frage untersuchen Sie gekrümmte Oberflächen und leiten mit Hilfe der Analysis wichtige Formeln der Geometrie ab.

Betrachten Sie die Ursprungsgerade $y = mx$ für $0 \leq x \leq h$. m und h sind positive Konstanten.



Durch Drehung dieser Geraden um 360° um die x -Achse entsteht ein Kegel mit einer gekrümmten Oberfläche A , für die gilt:

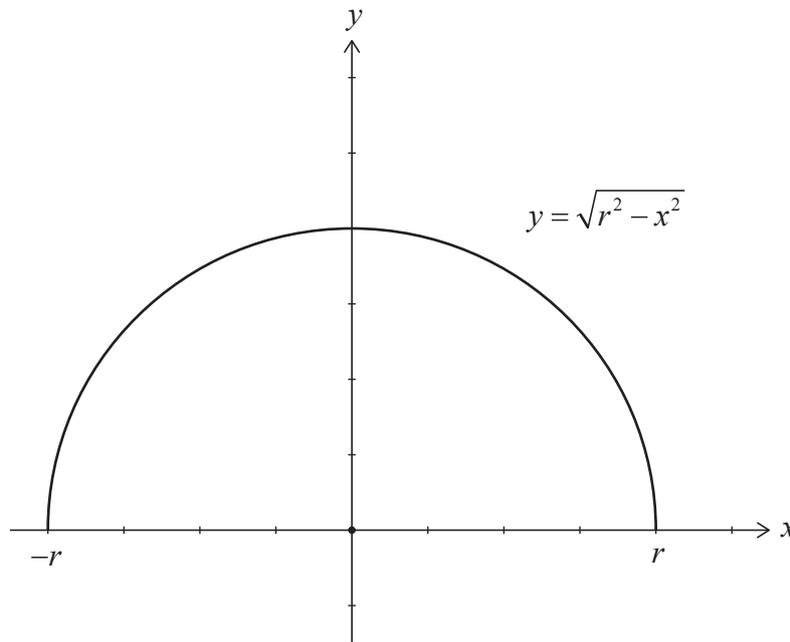
$$A = 2\pi \int_0^h y \sqrt{1 + m^2} \, dx.$$

- (a) Es gelte: $m = 2$ und $h = 3$. Zeigen Sie für diesen Fall: $A = 18\sqrt{5} \pi$. [2]
- (b) Betrachten wir nun den allgemeinen Fall, bei dem durch Drehung der Geraden $y = mx$ um 360° um die x -Achse und für $0 \leq x \leq h$ ein Kegel entsteht.
- (i) Deduzieren Sie einen Ausdruck für den Radius r dieses Kegels in Abhängigkeit von h und m . [1]
- (ii) Deduzieren Sie einen Ausdruck für die schräge Höhe l in Abhängigkeit von h und m . [2]
- (iii) Zeigen Sie dann mit Hilfe des obigen Integrals, dass $A = \pi r l$. [3]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 2)

Betrachten Sie den Halbkreis mit dem Radius r , definiert durch $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ mit $-r \leq x \leq r$.



- (c) Finden Sie einen Ausdruck für $\frac{dy}{dx}$. [2]

Eine differenzierbare Kurve $y = f(x)$ ist definiert für $x_1 \leq x \leq x_2$ und $y \geq 0$. Wenn eine solche Kurve um 360° um die x -Achse gedreht wird, hat die entstehende Oberfläche den folgenden Flächeninhalt A :

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx .$$

- (d) Durch Drehung des Halbkreises $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ mit $-r \leq x \leq r$ um 360° um die x -Achse entsteht eine Kugel. Zeigen Sie durch Integration, dass der Flächeninhalt der Oberfläche dieser Kugel $4\pi r^2$ beträgt. [4]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 2)

(e) Es sei $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ mit $-r \leq x \leq r$.

Der Graph von $y = f(x)$ wird in den Graphen von $y = f(kx)$, $k > 0$ überführt. Dadurch entsteht eine andere Kurve, die sogenannte Halbellipse.

(i) Beschreiben Sie diese geometrische Abbildung. [2]

(ii) Notieren Sie die x -Achsenabschnitte des Graphen $y = f(kx)$ in Abhängigkeit von r und k . [1]

(iii) Es sei weiterhin $y = f(kx)$. Finden Sie einen Ausdruck für $\frac{dy}{dx}$ in Abhängigkeit von x , r und k . [2]

(iv) Die Halbellipse $y = f(kx)$ wird um 360° um die x -Achse gedreht, wodurch ein Körper namens Rotationsellipsoid entsteht.

Finden Sie, abhängig von r und k , einen Ausdruck für den Flächeninhalt der Oberfläche A dieses Rotationsellipsoids.

Geben Sie Ihre Antwort in der Form $2\pi \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{p(x)} \, dx$ an, wobei $p(x)$ ein Polynom ist. [4]

(v) Der Planet Erde kann als Rotationsellipsoid modelliert werden. In diesem Modell gilt:

- Das Ellipsoid hat eine Rotationssymmetrieachse, die vom Nordpol zum Südpol verläuft.
- Die Entfernung vom Nordpol zum Südpol beträgt 12 714 km.
- Der Durchmesser des Äquators beträgt 12 756 km.

Finden Sie durch Wahl geeigneter Werte für r und k die Oberfläche der Erde in km^2 auf 4 signifikante Stellen genau. Formulieren Sie Ihre Antwort in der Form $a \times 10^q$ mit $1 \leq a < 10$ und $q \in \mathbb{Z}^+$. [4]

Quellen:

© International Baccalaureate Organization 2022